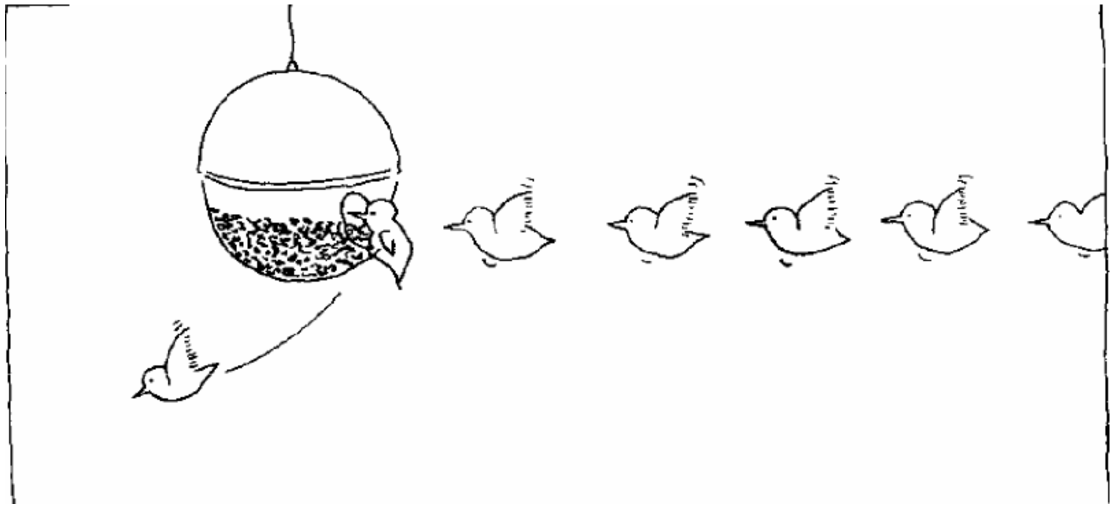
فرآیند مارکوف



۱.۴ فرایند مارکوف

برای روشن شدن مفهوم کلی فرایند مارکوف، می‌توان گفت که اگر زمان را در این فرایند، به سه دورهٔ «گذشته»، «حال» و «آینده» تقسیم کنیم، «آیندهٔ» این فرایند بستگی به مسیری که در «گذشته» طی کرده است، ندارد و تنها به‌موقعیت آن در زمان «حال» وابسته است.

مثلاً، فرایند پواسون نوعی فرایند مارکوف است، زیرا در آن تعداد پیشامدهایی که از یک لحظهٔ معین به‌بعد اتفاق می‌افتد، مستقل از پیشامدهایی است که قبل از آن افتاده است.

به‌عبارت دیگر، چنانچه وضعیت فرایند در لحظاتی مانند $t_1, t_2, \ldots, t_n$ مشخص باشد، می‌توان گفت که برای پیش‌بینی حرکت آیندهٔ این فرایند، تنها آخرین اطلاعات، یعنی وضعیت فرایند در لحظهٔ t_n، کافی است.

۲.۴ زنجیره‌های مارکوف

زنجیره‌های مارکوف حالت خاصی از فرایند مارکوف است، که در آن هم پارامتر t و هم حالت سیستم، فقط مقادیر گسسته را انتخاب می‌کند. بر این اساس، یک رشته متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots$ و X_n را زنجیرهٔ مارکوف می‌نامند، اگر به‌ازای تمام مقادیر n، و تمام حالتهای i و j رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$P[X_{n+1} = j \mid X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i] = P[X_{n+1} = j \mid X_n = i] \quad (۲.۴)$$

در اینجا به n، مرحله نیز گفته می‌شود.

ماتریس گذار

ماتریس گذار، ماتریسی است که عنصر تشکیل دهندهٔ آن در سطر i و ستون j، مقدار P_{ij} (احتمال تغییر حالت سیستم از i به j) است. اگر فرض کنیم که تعداد حالتهای سیستم M است، ماتریس گذار آن به‌شکل زیر درمی‌آید.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} P_{12} & \cdots\cdots & P_{1M} \\ P_{21} P_{22} & \cdots\cdots & P_{2M} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ P_{M1} P_{M2} & \cdots\cdots & P_{MM} \end{bmatrix} \qquad (۴.۲)$$

مثال ۲.۴ فرض کنید که درآمد شخصی در روز Y باشد. Y متغیری تصادفی است که فقط اعداد صحیح غیرمنفی را انتخاب می‌کند و $P[Y=i]=a_i$ است. بدیهی است که $a_i \geqslant 0$ ، $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$. چنانچه X_n معرف مجموع درآمد آن شخص در n روز اول باشد X_n یك زنجیرهٔ مارکوف است، زیرا با دانستن درآمد آن شخص در n روز اول می‌توان تابع توزیع مجموع درآمد $(n+1)$ روز اول را محاسبه کرد. ماتریس گذار این زنجیرهٔ مارکوف به‌شرح زیر است

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

قضیهٔ ۱۰۴ الف. به ازای تمام حالتهای i و j و بـرای هر K و K' رابطهٔ زیـر برقرار است

$$P_{ij}^{(k+k')} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{is}^{(k)} P_{sj}^{(k')} \qquad (۸.۲)$$

ب.

$$\mathbf{P}^{(n)} = P \cdot P \cdots\cdots\cdots P = P^{n} \qquad (۹.۲)$$

(رابطهٔ (۸.۲) که بـه رابطهٔ $C\text{-}K$[1] معـروف است،

مثال ۳.۴ زنجیرهٔ مارکوفی را در نظر بگیرید که ماتریس گذار آن به شرح زیر باشد (حالتهای سیستم را ۱ و ۲ و ۳ فرض کنید)

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} ۰/۷۵ & ۰/۲۵ & ۰ \\ ۰/۲۵ & ۰/۵ & ۰/۲۵ \\ ۰ & ۰/۷۵ & ۰/۲۵ \end{bmatrix}$$

مقادیر زیر را به‌دست آورید:

$P^{(۲)}_{۱۳}$ (احتمال اینکه سیستم از حالت ۱ شروع و پس‌از دو مرحله بـه ۳ برسد) و همچنین $P^{(۲)}_{۳۱}$

$$\mathbf{P}^{(۲)}=P\cdot P=\begin{bmatrix} ۰/۶۲۵ & ۰/۳۱۲۵ & ۰/۰۶۲۵ \\ ۰/۳۱۲۵ & ۰/۵ & ۰/۱۸۷۵ \\ ۰/۱۸۷۵ & ۰/۵۶۲۵ & ۰/۲۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$P^{(۲)}_{۱۳}=۰/۰۶۲۵$$

$$P^{(۲)}_{۳۱}=۰/۱۸۷۵$$

مقادیر فوق را می‌توان مستقیماً، یا با استفاده از رابطه‌های (۸.۴) نیز به‌دست آورد. مثلا

$$P^{(۲)}_{۱۳}=P_{۱۱}P_{۱۳}+P_{۱۲}P_{۲۳}+P_{۱۳}P_{۳۳}=۰/۰۶۲۵$$

که در واقع این عبارت حاصل‌ضرب سطر اول در ستون سوم ماتریس گذار است.

$$\pi_j^{(n)} = P(X_n = j) = \sum_i P[X_n = j \mid X_0 = i] \times P[X_0 = i] = \sum_i P_{ij}^{(n)} \cdot \pi_i^{(0)} \qquad (۱۲.۴)$$

محاسبهٔ احتمال حالت سیستم در چند مرحلهٔ مختلف

با دانستن حالت فعلی سیستم و ماتریس گذار می‌توانیم تابع توزیع حالت سیستم را در یک یا چند مرحلهٔ بعد به‌دست آوریم؛ اما، ممکن است مسیر مشخصی از حرکت آیندهٔ سیستم مدنظر باشد. مثلاً، محاسبهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$P[X_1 = j, X_2 = k \mid X_0 = i] = P[X_2 = k \mid X_1 = j, X_0 = i]\, P[X_1 = j \mid X_0 = i]$$

$$= P_{jk} \cdot P_{ij}$$

مثال ۴.۴ زنجیرهٔ مارکوف مثال ۳.۴ را در نظر بگیرید. به فرض اینکه در ابتدا سیستم بتواند حالتهای ۱ و ۲ و ۳ را با احتمالات مساوی انتخاب کند، مقادیر احتمالات زیر را محاسبه کنید.

$$A_{۱} = P(X_{۲} = ۲ \mid X_{۰} = ۱)$$

$$A_{۲} = P(X_{۲} = ۲)$$

$$A_{۳} = P(X_{۳} = ۲,\ X_{۲} = ۳,\ X_{۱} = ۲ \mid X_{۰} = ۱)$$

$$A_{۴} = P(X_{۳} = ۲,\ X_{۲} = ۳,\ X_{۱} = ۲)$$

حل: جملهٔ اول معرف احتمال تغییر حالت سیستم از ۱ بــه ۲ در سه مرحله است.
به‌عبارت دیگر

$$A_۱ = P_{۱۲}^{(۳)} = \frac{۲۳}{۶۴}$$

جمله دوم معرف احتمال بودن سیستم در حالت ۲ است، درحالی که از موقعیت آن در شروع مراحل اطلاعی نداریم. به عبارت دیگر، حالت سیستم در مرحلهٔ صفر می‌تواند هر کدام از سه حالت ۱ و ۲ و ۳ باشد. با استفاده از احتمال شرطی،

$$A_2 = \sum_{i=1}^{3} P(X_3 = 2 \mid X_0 = i) P(X_0 = i) = \frac{1}{3}\left(P_{12}^{(3)} + P_{22}^{(3)} + P_{32}^{(3)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{23}{64} + \frac{35}{64} + \frac{34}{64}\right) = \frac{143}{96}$$

جملهٔ سوم معرف احتمال تغییر حالت سیستم از ۱ به ۲ و سپس از ۲ به ۳ و پس از آن از ۳ به ۲ است. لذا

$$A_{۳} = P_{۱۲} P_{۲۳} P_{۳۲} = (۰٫۲۵)(۰٫۲۵)(۰٫۷۵) = \frac{۳}{۶۴}$$

جملهٔ چهارم شبیه جمله سوم است. با این تفاوت که از موقعیت سیستم در شروع مراحل

اطلاعی نداریم. بنابراین، با استفاده از احتمالات شرطی داریم:

$$A_{۴} = \sum_{i=۱}^{۳} P(X_{۳} = ۲ ,\ X_{۲} = ۳ ,\ X_{۱} = ۲ \mid X_{۰} = i) P(X_{۰} = i)$$

$$= \frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۶۴} + \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۴}\cdot\frac{۳}{۴} + \frac{۳}{۴}\cdot\frac{۱}{۴}\cdot\frac{۳}{۴}\right) = \frac{۶}{۶۴}$$